1.1.18 Rovnice rovnoměrně zrychleného pohybu

Předpoklady: 010117

Pedagogická poznámka: Stejně jako u předchozí hodiny je i v této hodině potřeba postupovat tak, aby studenti měli minimálně 15 spíše 20 minut na řešení příkladů 6, 7, 8, 9. Snažím se kvůli tomu neobětovat příklad 5 (ten se studentům bude hodit), spíše odvození vzorců pomocí plochy pod grafem jenom ukážu s tím, že si ho studenti nemají psát (v případě potřeby ho najdou v učebnici).

Co zatím víme o rovnoměrně zrychleném pohybu (srovnání s rovnoměrným pohybem):

rovnoměrný pohyb	rovnoměrně zrychlený pohyb
$v=$ konstanta $s=s_0+vt$	$a=$ konstanta $v=v_0+at$ $s=?$

Chybí rovnice pro dráhu rovnoměrně zrychleného pohybu, tato rovnice nebude mít obdobu u rovnoměrného pohybu.

Nejdříve zkusíme získat rovnici dráhy pro jednodušší případ = pohyb s nulovou počáteční rychlostí
Nápad: Při výpočtu zrychlení jsme dvakrát dělili dráhu časem $\Rightarrow$ při výpočtu dráhy ze zrychlení musíme dvakrát časem násobit $\Rightarrow$ možný vzorec $s=at^2$.

Pedagogická poznámka: Snažím se, aby návrh na vzorec podal někdo ze studentů. Zatím se pokaždé někdo našel, mezi zajímavé zdůvodnění druhé mocniny patří nápad, že stejně jako u rovnoměrného pohybu musíme vynásobit rychlost časem.

Př. 1: Proveď jednotkovou kontrolu vzorce $s=at^2$.

Dosadíme za veličiny jednotky: $s=at^2=1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot(1\mathrm{s})^2=1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot\mathrm{s}^2=1\mathrm{m}$

Rozměrově je náš vzorec správný.

Pedagogická poznámka: U následujícího příkladu nechávám třídu bez nápovědy jen chvilku. Pak si ukážeme, které zrychlení použít a že nejpřesnější budou výsledky počítané ze sloupců, které jsou nejvíce vpravo.

Př. 2: Ověř vzorec $s=at^2$ z údajů naměřených při pádu míče.

čas [s]	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3
dráha [m]	0,000	0,001	0,011	0,035	0,074	0,128	0,196
rychlost [m/s]	0,000	0,020	0,200	0,480	0,780	1,080	1,360
zrychlení [m/s^2]	0,000	0,4	3,600	5,600	6,000	6,000	5,600

Zkusíme podle našeho vzorce vypočítat dráhu míče za 0,3 s a srovnáme ji s dráhou v tabulce. Jakou hodnotu zrychlení pro výpočet použít?
Předpokládáme, že se míč pohyboval se stále stejným zrychlením $\Rightarrow$ použijeme průměrné zrychlení za prvních 0,3 sekundy:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{1,360-0}{0,3-0}\,\mathrm{m/s^2} = 4,53\,\mathrm{m/s^2}$$

$s = at^2 = 4,53 \cdot 0,3^2\,\mathrm{m} = 0,4077\,\mathrm{m}$ $\Rightarrow$ hodnota v tabulce je přibližně poloviční $\Rightarrow$ nejde o žádnou oslnivou shodu.

Zkusíme ještě prvních 0,2 s:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0,780-0}{0,2-0}\,\mathrm{m/s^2} = 3,9\,\mathrm{m/s^2}$$

$s = at^2 = 3,9 \cdot 0,2^2\,\mathrm{m} = 0,156\,\mathrm{m}$ $\Rightarrow$ hodnota v tabulce je opět přibližně poloviční $\Rightarrow$ správný vzorec má zřejmě tvar $s = \frac{1}{2}at^2$

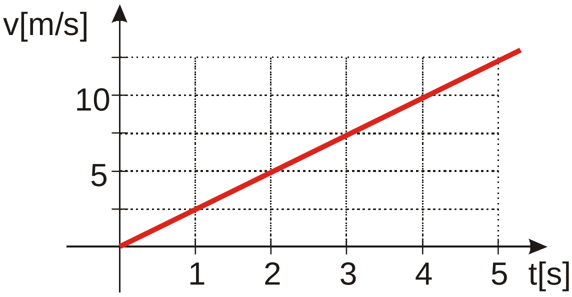
Pedagogická poznámka: Ještě než studenti začnou příklad řešit je dobré si popovídat, jaké zrychlení by měli do vzorce použít. Pro porovnání spočtené a naměřené dráhy je lepší si hodnoty zaokrouhlit (stejně nejsou přesné).

Jak jinak odvodit vzorec pro dráhu?

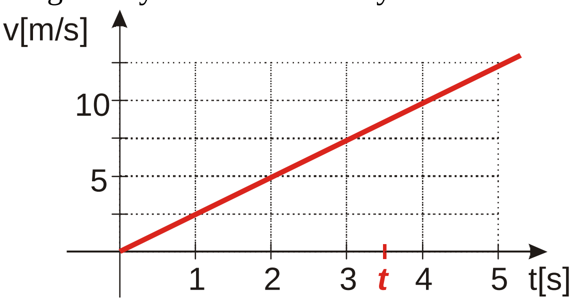
Víme, že dráhu libovolného pohybu můžeme určit jako plochu pod grafem rychlosti.

Př. 3: Nakresli graf rychlosti libovolného rovnoměrně zrychleného pohybu s nulovou počáteční rychlostí.

Rychlost je přímo úměrná času $\Rightarrow$ jde o přímku procházející počátkem.

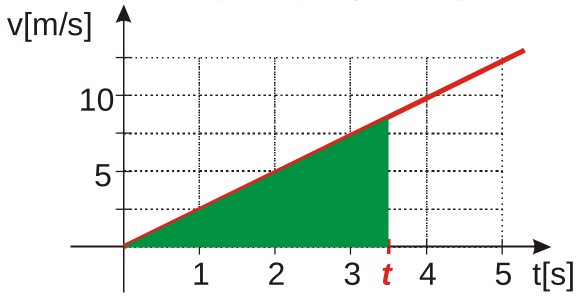


Do grafu vyznačíme libovolný čas *t*.



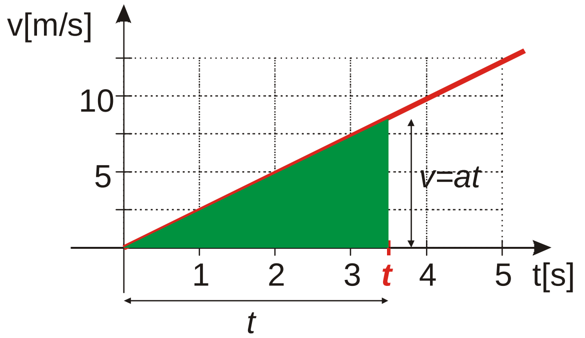
Př. 4: Zakresli do grafu dráhu uraženou od začátku pohybu do času *t*. Urči tuto dráhu. Předpokládej rovnoměrně zrychlený pohyb se zrychlením *a*.

Dráha odpovídá ploše pod grafem rychlosti



Vyznačená plocha tvoří pravoúhlý trojúhelník

$S = \frac{ab}{2}$



Velikosti stran:
vodorovná $a = t$ (od počátku pohybu uplynul právě vyznačený čas *t*)
svislá $b = v = at$ (od počátku pohybu získal předmět okamžitou rychlost $v = at$)
Dosadíme do vzorce:

$$S = \frac{ab}{2} = \frac{vt}{2} = \frac{(at)t}{2} = \frac{1}{2}at^2 = s$$

Dodatek: Z obrázku je velmi dobře vidět, proč vzorec $s = vt = (at)t = at^2$ dává dvoj násobné hodnoty. Za rychlost do vzorce, který je jinak vzorcem pro dráhu rovnoměrného pohybu dosazujeme rychlost, kterou při zrychlování předmět dosáhne až na konci sledovaného intervalu a tak dráha vyjde větší než jaká ve skutečnosti je. Správnější by bylo dosadit průměr z počáteční a koncové rychlost $\frac{0+v}{2} = \frac{v}{2} = \frac{at}{2}$, čímž dojdeme opět ke správnému vzorci $s = \frac{1}{2}at^2$.

Získali jsme stejný vzorec jiným postupem $\Rightarrow$ asi máme pravdu.

Jak se vzorec změní, když počáteční rychlost nebude nulová?

Př. 5: Představíme si vlak jedoucí rovnoměrně po kolejích rychlostí v_0. Uvnitř vlaku se začne průvodčí rozbíhat za černým pasažérem rovnoměrně zrychleně s nulovou počáteční rychlostí a zrychlením *a*. Urči:
a) Jakou dráhu urazí vlak za čas *t* vzhledem k nádraží.

b) Jakou dráhu urazí za čas *t* vzhledem k vlaku průvodčí
c) Jakým způsobem se pohybuje průvodčí vzhledem k nádraží.
d) Jakou dráhu urazí za čas *t* průvodčí vzhledem k nádraží.

a) Jakou dráhu urazí vlak za čas *t* vzhledem k nádraží.
Vlak se vzhledem k nádraží pohybuje rovnoměrně $\Rightarrow \; s = v_0 t$

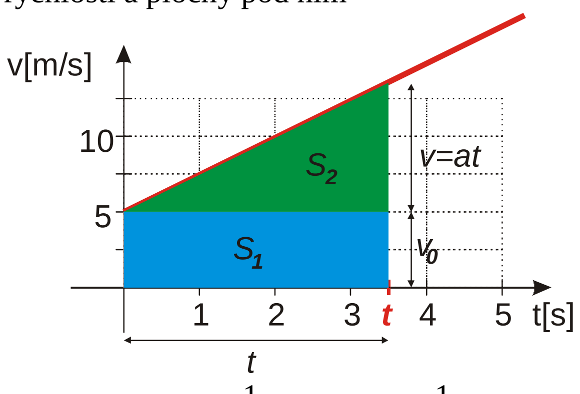
b) Jakou dráhu urazí za čas *t* vzhledem k vlaku průvodčí
Průvodčí se vzhledem k vlaku pohybuje rovnoměrně zrychleně s nulovou počáteční rychlostí
$\Rightarrow \; s = \frac{1}{2}at^2$

c) Jakým způsobem se pohybuje průvodčí vzhledem k nádraží.
Vzhledem k nádraží se průvodčí pohybuje rovnoměrně zrychleně s nenulovou počáteční rychlostí.

d) Jakou dráhu urazí za čas *t* průvodčí vzhledem k nádraží.
průvodní urazí jednak dráhu, kterou uběhne a jednak dráhu, kterou ujede s vlakem $\Rightarrow$
$s = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$

Pedagogická poznámka: Ačkoliv jsme dosud neřešili problém vztažných soustav nemají studenti s předchozím příkladem problémy a pokud ano, tak hned v bodě a), kde se bojí napsat $s = v_0 t$.

Správnost výsledku opět můžeme potvrdit pomocí grafu rychlosti s nenulovou počáteční rychlostí a plochy pod ním



$$S = S_1 + S_2 = v_0 t + \frac{1}{2}a(at) = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = s$$

Můžeme doplnit naši tabulku:

rovnoměrný pohyb	**rovnoměrně zrychlený pohyb**
$v =$ konstanta $s = s_0 + vt$	$a =$ konstanta $v = v_0 + at$ $s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$

Pedagogická poznámka: Následující příklady musí studenti řešit zcela sami. Nejde o nic těžkého, jde o jeden z rozhodujících okamžiků (spolu s následujícími dvěma hodinami) v tom, zda budou dále schopni počítat příklady sami nebo budou už navždy odkázáni na opisování z tabule. Trvám na tom, že řešení musí obsahovat vzorec, do kterého dosazují, dosazení konkrétních (v případě potřeby převedených) hodnot (zdroj největšího množství chyb v následujících příkladech) a výsledek. Mezivýpočty se snažím potlačovat, vedou k nepřesnostem a omylům (ve třídách, kde učím i matematiku, mají studenti za sebou dvě hodiny cvičení práce s kalkulátorem, takže pro ně nesmí být problém počítat všechny výsledky ve fyzice na kalkulátoru naráz).
Pokud někdo nedopočítá příklady ve škole, musí je dodělat doma.

Pedagogická poznámka: V následujících hodinách je třeba trvat (a žáci na to v tomto místě upozornit), že znalost vzorců pro rovnoměrně zrychlený pohyb je zcela nutná (a neznalost se bude trestat).

Př. 6: Urči dráhu, kterou urazí kámen puštěný z věže (padá se zrychlením $10\,\mathrm{m/s^2}$) za:
a) 1 s, b) 2 s, c) 3 s, d) 4s.
Jak se ve výsledcích projevuje, že pohyb kamene je zrychlený?

$v_0 = 0$, $a = 10\,\mathrm{m/s^2}$, $t = 1\,\mathrm{s}$, $s = ?$

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = 0 + 0 \cdot t + \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}at^2$$

Nyní dosadíme jednotlivé časy:

- $t = 1\,\mathrm{s}$: $s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}10 \cdot 1^2\,\mathrm{m} = 5\,\mathrm{m}$,
- $t = 2\,\mathrm{s}$: $s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}10 \cdot 2^2\,\mathrm{m} = 20\,\mathrm{m}$,
- $t = 3\,\mathrm{s}$: $s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}10 \cdot 3^2\,\mathrm{m} = 45\,\mathrm{m}$,
- $t = 4\,\mathrm{s}$: $s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}10 \cdot 4^2\,\mathrm{m} = 80\,\mathrm{m}$.

Zrychlenost pohybu se projevuje tím, že ačkoliv se časy liší stále o jednu sekundu, rozdíly mezi drahami se neustále zvětšují.

Př. 7: Řidič po projetí vesnice rychlostí 50 km/h šlápne na plyn a začne zrychlovat se zrychlením $2{,}1\,\mathrm{m/s^2}$. Urči jeho rychlost po pěti sekundách. Kolik metrů od cedule při tom ujel?

Musíme převést rychlost na m/s.
$v_0 = 50\,\mathrm{km/h} = 13{,}9\,\mathrm{m/s}$, $a = 2{,}1\,\mathrm{m/s^2}$, $t = 5\,\mathrm{s}$, $v = ?$ $s = ?$

$$v = v_0 + at = 13{,}9 + 2{,}1 \cdot 5\,\mathrm{m/s} = 24{,}4\,\mathrm{m/s} = 87{,}8\,\mathrm{km/h}$$

$$s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = 13{,}9 \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 2{,}1 \cdot 5^2\,\mathrm{m} = 95{,}7\,\mathrm{m}$$

Řidič zrychlil na 87,8 km/h a ujel při tom 95,7 m.

Př. 8: Jarda zareagoval při běhu na 100 m až 0,8 s po výstřelu ze startovní pistole. Během 2,9 sekundy zrychlil na 6,9 m/s. Stejnou rychlostí pak běžel zbytek trasy. Jaké bylo jeho zrychlení po startu? Na jaké dráze zrychlil? Jaký byl jeho celkový čas?

Zrychlená část pohybu: $v_0 = 0$, $t = 2{,}9\ \mathrm{s}$, $v = 6{,}9\ \mathrm{m/s}$, $a = ?$, $s = ?$

$$v = at \Rightarrow a = \frac{v}{t} = \frac{6{,}9}{2{,}9}\ \mathrm{m/s^2} = 2{,}4\ \mathrm{m/s^2}$$

$$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\cdot 2{,}4 \cdot 2{,}9^2\ \mathrm{m} = 10\ \mathrm{m}$$

Zbývající část běhu již běží rovnoměrně.

$$s = vt \Rightarrow t = \frac{s}{v} = \frac{90}{6{,}9}\ \mathrm{s} = 13{,}0\ \mathrm{s}$$

Celkový čas (počítá se od výstřelu startovní pistole): $t_c = 0{,}8 + 2{,}9 + 13\ \mathrm{s} = 16{,}7\ \mathrm{s}$

Jarda se rozbíhal se zrychlením $2{,}4\ \mathrm{m/s^2}$ na 10 m. Dosáhl celkového času 16,7 s.

Př. 9: Urči, za jak dlouho spadne z výšky 1,56 m nafukovací míč, pokud padá se zrychlením $5{,}8\,\mathrm{m/s^2}$.

$v_0 = 0$, $a = 5{,}8\,\mathrm{m/s^2}$, $s = 1{,}56\ \mathrm{m}$, $s_0 = 0$, $t = ?$

Neznáme ani nás nezajímá konečná rychlost $\Rightarrow$ zvolíme rovnici pro dráhu $s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$.

Počáteční rychlost i počáteční dráha jsou nulové $\Rightarrow$ vzorec se zjednoduší:

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = 0 + 0\cdot t + \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}at^2$$

Vyjádříme *t*: $s = \frac{1}{2}at^2 \quad / \cdot 2$

$2s = at^2 \quad / : a$

$t^2 = \frac{2s}{a} \quad / \sqrt{\ }$

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2\cdot 1{,}56}{5{,}8}}\ \mathrm{s} = 0{,}73\ \mathrm{s}$$

Nafukovací míč spadne z výšky 1,56 m se zrychlením $5{,}8\,\mathrm{m/s^2}$ za 0,73 s.

Shrnutí: Pohybové veličiny při rovnoměrně zrychleném pohybu popisují tyto rovnice:
$a = \text{konstanta}$, $v = v_0 + at$, $s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$.